第 40 講　整数問題

1 ［1］　等式 $xy=2x+2y+2$ を満たす整数 x，y の組，および自然数 x，y の組をそれぞれ求めよ．ただし，$x \geqq y$ とする．

［2］ (1)　k を整数とするとき，x の方程式 $x^2=k^2+12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．

(2)　x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　$5x+3y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組の個数を求めよ．

［2］　x，y を 1 以上 100 以下の整数とする．$5x-7y=1$ を満たす $(x,\ y)$ の組の個数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　m を自然数とする．m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数であることを示せ.

[2]　(1)　x^4+4 を因数分解せよ.

(2)　x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限ることを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第40講　整数問題

[1]　等式 $xy+3x-y-8=0$ を満たす自然数 x, y は $x=$ ア , $y=$ イ である.

[2]　a, x を自然数とする. $x^2+x-(a^2+5)=0$ を満たす a, x の組は
$(a,\ x)=($ ウ , エ $)$, $($ オ , カ $)$（ただし ウ $<$ オ ）である.

[3]　$3x+5y=2009$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は キクケ 通りある.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 40 講　整数問題

> 1 ［1］　等式 $xy=2x+2y+2$ を満たす整数 x，y の組，および自然数 x，y の組をそれぞれ求めよ．ただし，$x \geqq y$ とする．

$xy=2x+2y+2$　より　$(x-2)(y-2)=6$

$x \geqq y$　より　$x-2 \geqq y-2$　　また，$x-2$，$y-2$ はともに整数

よって　$(x-2,\ y-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2),\ (-2,\ -3),\ (-1,\ -6)$

したがって　整数 x，y の組は　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ -4),\ (0,\ -1)}$

自然数 x，y の組は　$\boldsymbol{(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4)}$

> 1 ［2］　(1)　k を整数とするとき，x の方程式 $x^2=k^2+12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．
>
> (2)　x の方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

(1)　$x^2=k^2+12$　より　$x^2-k^2=12$　　$(x+k)(x-k)=12$

x，k が整数のとき　$(x+k)+(x-k)=2x$　より　2 数 $x+k$，$x-k$ の和は偶数

よってこの 2 数は偶奇を共にする．

$(x+k,\ x-k)=(-2,\ -6),\ (-6,\ -2),\ (2,\ 6),\ (6,\ 2)$

$(x,\ k)=(-4,\ 2),\ (-4,\ -2),\ (4,\ -2),\ (4,\ 2)$

したがって求める k は　$\boldsymbol{k=\pm 2}$

(2)　方程式 $(2a-1)x^2+(3a+2)x+a+2=0$　……①　の判別式を D とすると

$$D=(3a+2)^2-4(2a-1)(a+2)=a^2+12$$

①が整数解をもつためには，D が平方数であることが必要である．

a が整数のとき　$a^2+12=N^2$　（N は整数）とすると，

(1)よりこれを満たす a は　$\boldsymbol{a=\pm 2}$

$a=2$ のとき

①は　$3x^2+8x+4=0$　　$(3x+2)(x+2)=0$　　$x=-\dfrac{2}{3},\ -2$

$a=-2$ のとき

①は　$-5x^2-4x=0$　　$x(5x+4)=0$　　$x=-\dfrac{4}{5},\ 0$

よっていずれも整数解をもち，適する．

以上より　**$a=2$ のとき　整数解　-2**

$a=-2$ のとき　整数解　0

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ $5x+3y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組の個数を求めよ.

$5x+3y+z=15$　……①　において，y，z は自然数より　$3y \geqq 3$，$z \geqq 1$
x は自然数より　$5x \leqq 15-3-1=11$　　よって　$x \leqq 2$
したがって①を満たす自然数 x の値は $x=1$，2 に限られる.
$x=1$ のとき　①は　$3y+z=10$
これを満たす y，z の組は　$(y,\ z)=(1,\ 7)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 1)$ の 3 組
$x=2$ のとき　①は　$3y+z=5$
これを満たす y，z の組は　$(y,\ z)=(1,\ 2)$ の 1 組
以上より，①を満たす自然数 x，y，z の組の個数は　**4 個**

2 ［2］ x，y を 1 以上 100 以下の整数とする．$5x-7y=1$ を満たす $(x,\ y)$ の組の個数を求めよ.

$5x-7y=1$　……①　の解の 1 つとして $x=3$，$y=2$ が存在し，
$5\cdot3-7\cdot2=1$　……②　である.
①−②より　$5(x-3)-7(y-2)=0$　つまり　$5(x-3)=7(y-2)$
5 と 7 は互いに素であることより，
$y-2=5k$（k は整数）とおける．このとき　$x-3=7k$
つまり　$x=7k+3$，$y=5k+2$
0 以上 100 以下の整数 x，y のうち，これらをともに満たす整数 k は
$k=0$，1，2，……，13 の 14 通り.
よって，題意を満たす $(x,\ y)$ の組の個数は　**14 個**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ m を自然数とする．m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数であることを示せ．

m が奇数のとき，$m=2n-1$（n は自然数）とおくと

$$m^2-1=(2n-1)^2-1=4n^2-4n=4n(n-1)$$

$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数の積より 2 の倍数である．

よって，m が奇数のとき m^2-1 は 8 の倍数である．

したがって，m が奇数ならば，m^2-1 は 8 で割り切れる．

また，自然数 m が奇数でないとき，m は偶数である．

このとき　$m=2n$（n は自然数）とおくと

$$m^2-1=(2n)^2-1=(2n+1)(2n-1)$$

これは連続する 2 つの奇数の積，つまり奇数であり，8 で割り切れない．

よって m が自然数のとき，m^2-1 が 8 で割り切れるならば，m は奇数である．

以上より，m^2-1 が 8 で割り切れるための必要十分条件は，m が奇数である．

3 ［2］ (1)　x^4+4 を因数分解せよ．

(2)　x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限ることを示せ．

(1)　$x^4+4=(x^2)^2+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2=\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

(2)　$x=1$ のとき

$x^4+4=1+4=5$　　これは素数である．

x が 2 以上の整数のとき

x^4+4 が素数となるためには，(1)より，x^2+2x+2，x^2-2x+2 のうち小さい方が 1 である必要がある．

x は正の整数であるから　$x^2-2x+2<x^2+2x+2$

より　$x^2-2x+2=1$ である．

$x^2-2x+1=0$　　　$(x-1)^2=0$

よって　$x=1$　　これは $x\geqq 2$ を満たさず不適．

よって，x が正の整数であるとき，x^4+4 が素数となるのは $x=1$ のときに限る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第40講　整数問題

［1］ 等式 $xy+3x-y-8=0$ を満たす自然数 x，y は $x=$ **ア** ，$y=$ **イ** である．

［2］ a，x を自然数とする．$x^2+x-(a^2+5)=0$ を満たす a，x の組は
$(a,\ x)=($ **ウ** ， **エ** $)$，$($ **オ** ， **カ** $)$（ただし **ウ** $<$ **オ** ）である．

［3］ $3x+5y=2009$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は **キクケ** 通りある．

解答例

［1］ $xy+3x-y-8=0$　より　$(x-1)(y+3)-5=0$　　$(x-1)(y+3)=5$

x，y は自然数より　$y+3\geqq 4$

よって　$(x-1,\ y+3)=(1,\ 5)$ のみで，$x=\mathbf{2}$，$y=\mathbf{2}$

［2］ x の方程式 $x^2+x-(a^2+5)=0$　……①　の判別式を D とすると，①が自然数の解をもつためには $D=4a^2+21$ が平方数であることが必要である．

よって　$4a^2+21=b^2$（b は自然数）とおくと，$b^2-4a^2=21$

$(b+2a)(b-2a)=21$

$b+2a>0$　より　$b-2a>0$　　また　$b+2a>b-2a$

よって　$(b+2a,\ b-2a)=(7,\ 3)$，$(21,\ 1)$　より　$(a,\ b)=(1,\ 5)$，$(5,\ 11)$

$a=1$ のとき　①は $x^2+x-6=0$　　$(x-2)(x+3)=0$　　$x=2$，-3

$a=5$ のとき　①は $x^2+x-30=0$　　$(x-5)(x+6)=0$　　$x=5$，-6

いずれも自然数の解をもち，適する．　　以上より　$(a,\ x)=(\mathbf{1},\ \mathbf{2})$，$(\mathbf{5},\ \mathbf{5})$

［3］ $3x+5y=2009$　……①　の解の1つとして $x=3$，$y=400$ が存在し，

$3\cdot 3+5\cdot 400=2009$　……②　である．

①－②より　$3(x-3)+5(y-400)=0$　つまり　$3(x-3)=5(400-y)$

3と5は互いに素であることより，$400-y=3k$（k は整数）とおける．

このとき　$x-3=5k$　　よって　$x=5k+3$，$y=400-3k$ と表せる．

$x>0$，$y>0$　より　$5k+3>0$，$400-3k>0$　　よって　$-\dfrac{3}{5}<k<\dfrac{400}{3}$

これを満たす整数 k は　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 133$

よって　題意を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は　**134** 通り

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。